## Početní část 1 - 14.6.2021

1. Jde o lineární rovnici čtvrtého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Charakteristický polynom je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$$

Obecné řešení homogenní rovnice tak je

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x \sin x + C_4 x \cos x.$$

Pravá strana je ve speciálním tvaru s hodnotami $\mu = 0$, $\nu = 1$, $P_1(x) = 2$, $P_2(x) = 1$. Protože $\mu + i\nu = i$ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu, řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p = x^2(Q_1(x) \cos x + Q_2(x) \sin x),$$

kde $Q_1$ a $Q_2$ jsou polynomy nejvýše nultého stupně, tedy

$$y_p = Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x.$$

Spočítáme derivace $y_p$ do čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned} y_p' &= -Ax^2 \sin x + 2Ax \cos x + Bx^2 \cos x + 2Bx \sin x \\ y_p'' &= -Ax^2 \cos x - 4Ax \sin x + 2A \cos x \\ &\quad - Bx^2 \sin x + 4Bx \cos x + 2B \sin x \\ y_p''' &= Ax^2 \sin x - 6Ax \cos x - 6A \sin x \\ &\quad - Bx^2 \cos x - 6Bx \sin x + 6B \cos x \\ y_p^{(4)} &= Ax^2 \cos x + 8Ax \sin x - 12A \cos x \\ &\quad + Bx^2 \sin x - 8Bx \cos x - 12B \sin x \end{aligned}$$

a odtud

$$y_p^{(4)} + 2y_p'' + y_p = -8A \cos x - 8B \sin x.$$

Lehce tak získáváme $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{8}$ a můžeme psát obecné řešení zadané rovnice

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x \sin x + C_4 x \cos x - \frac{1}{4}x^2 \cos x - \frac{1}{8}x^2 \sin x \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

2. Rozepíšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2 3^n - n4^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(obě řady zjevně konvergují dle odmocninového kritéria) a na základě toho budeme zkoumat mocninnou řadu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

pro $|x| < 1$. Na tomto intervalu provedeme následující úvahy:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}\\
h(x) &\stackrel{c}{=} \int \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad \text{volíme int. konstantu } C = 0\\
\frac{h(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\\
f(x) &\stackrel{c}{=} \int \frac{h(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \qquad \text{opět } C = 0\\
\frac{h(x)}{x} &= f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\\
h(x) &= \frac{x}{(1-x)^2}\\
\frac{g(x)}{x} &= h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}\\
g(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Nakonec máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n = g\left(\frac{1}{2}\right) - h\left(\frac{2}{3}\right) = 6 - 6 = 0.$$